

# כלים מתמטיים 96039

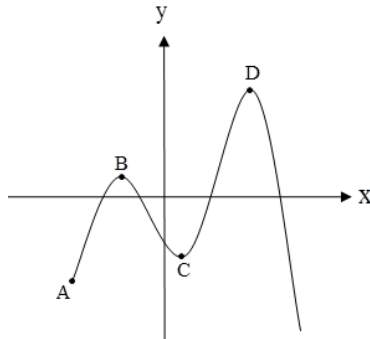
פרק 20 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום

תוכן העניינים

1. נקודות קיצון של פונקציות..... 1
2. חקירת פונקציה פולינומית..... 4
3. פונקציה זוגית ואי-זוגית..... 8

## נקודות קיצון של פונקציות:

### סיכום כללי:



### נקודות קיצון (נקודות מינימום/מקסימום):

- מינימום או מקסימום מקומי (פנימי) – B, C, D.
- מינימום או מקסימום קצה – A.
- מינימום או מקסימום מוחלט – D.

### נקודות קיצון מקומיות:

- שיפוע המשיק לפונקציה בנקודות קיצון מקומיות הוא אפס.
- בנקודה שבה שיפוע המשיק לפונקציה הוא אפס תיתכן נקודת קיצון מקומית.
- נקודה כזו נקראת נקודה חשודה כקיצון. ניתן לבדוק אם היא אכן נקודת קיצון.

### שלבים למציאת נקודות קיצון מקומיות:

- נגזור את הפונקציה.
- נשווה את הנגזרת לאפס ונחלץ את ערכי ה- $x$  של הנקודות החשודות כקיצון.
- נציב את ערכי ה- $x$  מסעיף ב' בפונקציה המקורית לקבלת ערכי ה- $y$ .
- נקבע אם הנקודה היא נקודת קיצון ונסווג את סוג הקיצון על ידי טבלה.

### שאלות:

1) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x) = 10x - x^2$ .

2) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3 - 12x$ .

- מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
- מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

- (3) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ .  
 א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?  
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- (4) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$ .  
 א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?  
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- (5) לפונקציה  $f(x) = ax - x^3 - 5$  יש נקודת קיצון בנקודה שבה  $x = -1$ .  
 מצא את ערכו של הפרמטר  $a$ .
- (6) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + x^2$ . ידוע שהנקודה  $x = 1$  נקודת קיצון.  
 מצא את הקבוע  $a$ .
- (7) לפונקציה  $f(x) = Ax^3 + Bx^2 - 1$  יש נקודת קיצון ששיעוריה:  $(2, 3)$ .  
 מצא את ערכי הפרמטרים  $A, B$ .
- (8) לפונקציה  $f(x) = Ax^3 + Bx^2 - 4x$  יש נקודת קיצון ב- $x = -1$  ו- $x = 4$ .  
 מצא את הפרמטרים ואת שיעור ה- $y$  של שתי נקודות הקיצון.
- (9) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + bx^2$ . ידוע שהנקודה  $(1, 2)$  נקודת קיצון.  
 מצא את הפרמטרים  $a, b$ .
- (10) לפונקציה  $f(x) = ax^4 + bx^2 + 35$  יש נקודת קיצון ששיעוריה  $(2, 3)$ .  
 מצא את ערכי הפרמטרים  $a, b$ .

## תשובות סופיות:

(1)  $\max(5, 25)$

(2) א.  $\min(2, -16)$ ,  $\max(-2, 16)$  ב. עולה:  $x > 2$ ,  $x < -2$  יורדת:  $-2 < x < 2$

(3) א.  $\max(0, 9)$ ,  $\min(\sqrt{5}, -16)$ ,  $\min(-\sqrt{5}, -16)$

ב. עולה:  $-\sqrt{5} < x < 0$ ,  $x > \sqrt{5}$  יורדת:  $0 < x < \sqrt{5}$ ,  $x < -\sqrt{5}$

(4) א.  $\min(3, 5)$  ב. עולה:  $x > 3$  יורדת:  $x < 3$

(5)  $a = 3$

(6)  $a = -\frac{2}{3}$

(7)  $A = -1$ ,  $B = 3$

(8)  $A = \frac{1}{3}$ ,  $B = -\frac{3}{2}$ ,  $\left(-1, 2\frac{1}{6}\right)$ ,  $\left(4, -18\frac{2}{3}\right)$

(9)  $b = 6$ ,  $a = -4$

(10)  $a = 2$ ,  $b = -16$

## חקירת פונקציה פולינומית:

### שאלות:

(11) נתונה הפונקציה  $f(x) = 10x - x^2$ .

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(12) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3 - 12x$ .

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(13) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ .

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(14) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$  חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

15 נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3$  חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

16 נתונה הפונקציה:  $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 54x - 50$ .

- לאילו ערכים של הפרמטר  $a$  עולה הפונקציה בכל תחום הגדרתה?
- הצב בפונקציה  $a = 6$  וחקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים: תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- $y$ , סרטוט.

17 נתונה הפונקציה:  $y = -3x^3 + 6x^2 - 4x + d$  (פרמטר).

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה:  $x = 2$ .

- מצא את  $d$ .
- האם יש לפונקציה נקודות קיצון?
- כתוב את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



18 לפניך גרף הפונקציה  $f(x) = x^3 - 3x$ :

- מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 5$ ?
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 2$ ?
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 0.5$ ?
- עבור איזה ערך של  $k$  למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיוק פתרון אחד?
- עבור איזה ערך של  $k$  למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיוק שני פתרונות?
- עבור איזה ערך של  $k$  למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיוק שלושה פתרונות?
- האם קיים ערך של  $k$  עבורו למשוואה  $f(x) = k$  אין פתרון?

## תשובות סופיות:

11) א. כל  $x$  ב.  $\max(5, 25)$  ג. עלייה:  $x < 5$ , ירידה:  $x > 5$

ד.  $(0, 0)$ ,  $(10, 0)$  .



12) א. כל  $x$  ב.  $\min(2, -16)$ ,  $\max(-2, 16)$  ג. עלייה:  $x > 2$ ,  $x < -2$ , ירידה:  $-2 < x < 2$

ד.  $(0, 0)$ ,  $(\sqrt{12}, 0)$ ,  $(-\sqrt{12}, 0)$  .



13) א. כל  $x$  ב.  $\max(0, 9)$ ,  $\min(\sqrt{5}, -16)$ ,  $\min(-\sqrt{5}, -16)$  ג. עלייה:  $-\sqrt{5} < x < 0$ ,  $x > \sqrt{5}$ , ירידה:  $x < -\sqrt{5}$ ,  $0 < x < \sqrt{5}$

ד.  $(0, 9)$ ,  $(\pm 1, 0)$ ,  $(\pm 3, 0)$  .



14) א. כל  $x$  ב.  $\min(3, 5)$  ג. תחומי עלייה:  $x > 3$ , תחומי ירידה:  $x < 3$

ד.  $(0, 32)$  .



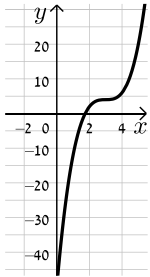
15) א. כל  $x$  ב. אין. ג. עולה לכל  $x$

ד.  $(0, 0)$  .



16) א.  $-6 < a < 6$  ב. תחום הגדרה: כל  $x$ , נקודות קיצון: אין, תחומי עלייה: כל  $x$ ,

תחומי ירידה: אין, נקודת חיתוך עם הצירים:  $(0, -50)$ , להלן גרף:



17) א.  $d = 8$  ב. לא. ג. יורדת בתחום  $x \neq \frac{2}{3}$

ד.  $(0, 8)$  ה. להלן גרף:



18) א. 1. ב. 2. ג. 3. ד.  $k > 2, k < -2$

ה.  $k = \pm 2$  ו.  $-2 < k < 2$  ז. לא.

## פונקציה זוגית ואי-זוגית:

### סיכום כללי:

#### הגדרות:

- פונקציה  $f(x)$  תיקרא זוגית אם לכל  $x$  בתחום הגדרתה מתקיים:  $f(x) = f(-x)$ .
- פונקציה  $f(x)$  תיקרא אי-זוגית אם לכל  $x$  בתחום הגדרתה מתקיים:  $f(-x) = -f(x)$ .

#### שאלות:

(1) קבע אלו מהפונקציות הבאות הן זוגיות/אי-זוגיות לא זו ולא זו:

א.  $f(x) = 3x - 5$

ב.  $f(x) = 3x^2$

ג.  $f(x) = 2x^3$

ד.  $f(x) = x^3 - 2x^2$

ה.  $f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 1$

ו.  $f(x) = 4x^5 - 3x^3 - 1$

(2) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל  $x$ . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה זוגית:



(3) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל  $x$ . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה אי-זוגית:



- (4) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = x^4 - 4x^2$  בתחום:  $[0:3]$ .
- תחום הגדרה.
  - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
  - מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
  - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
  - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ב. הוכח כי הפונקציה  $f(x)$  היא פונקציה זוגית.
- ג. התבסס על ממצאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום:  $[-3:3]$  (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום  $[-3:0]$  לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

(5) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = x^6 - 3x^2 + 3$ .

- א. חקור את הפונקציה בתחום:  $[0:4]$  לפי הסעיפים הבאים:  
תחום הגדרה, מציאת חיתוך עם ציר ה- $y$ , מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה בתחום הנ"ל.
- ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זו ולא זו?  
נמק באמצעות חישוב מתאים.
- ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שסרטטת בסעיף א', את עקום הפונקציה בתחום  $[-4:0]$ .
- ד. הוכח כי הפונקציה חיובית לכל  $x$  בתחום הגדרתה.

(6) לפניך הפונקציה:  $f(x) = -2x^6 + 3x^4 + a$ , פרמטר  $a$ .

ידוע כי לפונקציה ערך מירבי של 1.

- א. מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציה  $f(x)$ .
- ב. חקור את הפונקציה בתחום:  $[-2:0]$  לפי הסעיפים הבאים:  
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים, מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.
- ג. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זה ולא זה?  
נמק באמצעות חישוב מתאים.
- ד. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את גרף הפונקציה בתחום:  $[-2:2]$ .

(7) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = 3x^3 - 9x$ .

- א. חקור את הפונקציה בתחום:  $[0:5]$  לפי הסעיפים הבאים:  
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים, מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.
- ב. הוכח כי הפונקציה היא אי-זוגית.
- ג. התבסס על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום:  $[-5:5]$  (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום  $[-5:0]$  לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

- (8) לפינך הפונקציה הבאה :  $f(x) = 5x^3 - 3x^5 + b$  , פרמטר  $b$  .  
 ידוע כי הישר  $y = 2x$  עובר דרך כל הנקודות על גרף הפונקציה  
 שמקיימות :  $f'(x) = 0$  .
- א. מצא את  $b$  וכתוב את הפונקציה  $f(x)$  .  
 ב. חקור את הפונקציה בתחום :  $[0:2]$  לפי הסעיפים הבאים :
- תחום הגדרה.
  - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
  - מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
  - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
  - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
  - בדוק האם הפונקציה היא זוגית/אי-זוגית או לא זו ולא זו.  
נמק את קביעתך באמצעות חישוב מתאים.
  - הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה של גרף הפונקציה את הגרף בתחום  $[-2:0]$  .

(9) נתונה הפונקציה :  $f(x) = \frac{x^7 - x}{3}$  .

- א. חקור את הפונקציה בתחום :  $[-4:0]$  לפי הסעיפים הבאים :
- תחום הגדרה.
  - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
  - מציאת נקודות קיצון וסיווגן  
(בתשובתך השאר עד 2 ספרות לאחר הנקודה העשרונית).
  - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
  - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
  - האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? או לא זו ולא זו?  
נמק ע"י חישוב מתאים.
  - הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שעשית את גרף הפונקציה בתחום  $[0:4]$  .

## תשובות סופיות:

(1) זוגית: ב', ה'. אי-זוגית: ג', לא זו ולא זו: א', ד', ו'.

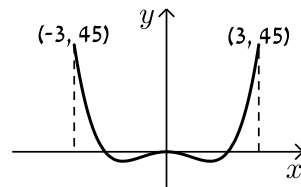
(2) להלן הגרפים:



(3) להלן הגרפים:

(4) א. i.  $0 \leq x \leq 3$  ii.  $(0,0), (2,0)$  iii.  $\max(3,45)$  קצה,  $\min(\sqrt{2}, -4)$ .iv. עולה:  $\sqrt{2} < x < 3$ , יורדת:  $0 < x < \sqrt{2}$  ב. סעיף הוכחה.  $\max(0,0)$  קצה.

סרטוט עבור סעיף ג:



סרטוט עבור חלק v:

(5) א. תחום הגדרה:  $0 \leq x \leq 4$ , חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $(0,3)$ ,נקודות קיצון:  $\max(4,4051)$  קצה,  $\min(1,1)$ ,  $\max(0,3)$  קצה,עולה:  $1 < x < 4$ , יורדת:  $0 < x < 1$  ב. זוגית.

ד. הוכחה עפ"י הסרטוט.

סרטוט עבור סעיף ג:



סרטוט עבור סעיף א:



6) א.  $a=0$  ב. תחום הגדרה:  $-2 \leq x \leq 0$ , חיתוך עם הצירים:  
 נקודות קיצון:  $(-1.225, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $\min(-2, -80)$  קצה,  $\max(-1, 1)$  קצה,  $\min(0, 0)$  קצה,

עולה:  $-1 < x < -2$ , יורדת:  $-1 < x < 0$ . ג. זוגית.

סרטוט עבור סעיף א: סרטוט עבור סעיף ד:



7) א. תחום הגדרה:  $0 \leq x \leq 5$ , חיתוך עם הצירים:  $(0, 0)$ ,  $(\sqrt{3}, 0)$ ,

נקודות קיצון:  $\max(5, 330)$  קצה,  $\min(1, -6)$  קצה,  $\max(0, 0)$  קצה,

עולה:  $1 < x < 5$ , יורדת:  $0 < x < 1$ . ב. אי-זוגית.

סרטוט עבור סעיף א: סרטוט עבור סעיף ג:



8) א.  $b=0$  ב. i  $0 \leq x \leq 2$  ii  $(0, 0)$ ,  $(1.29, 0)$  iii  $\min(2, -56)$  קצה,

iv עולה:  $0 < x < 1$ , יורדת:  $1 < x < 2$ . max  $(0, 0)$ ,  $\min(1, 2)$  קצה.

ג. אי-זוגית. סרטוט עבור חלק v: סרטוט עבור סעיף ד:



9) א. i  $-4 \leq x \leq 0$  ii  $(-1, 0)$ ,  $(0, 0)$  iii  $\min(0, 0)$  קצה,  $\max(-0.723, 0.207)$  קצה,

iv עולה:  $-4 < x < -0.723$ . min  $(-4, -5460)$  קצה.

יורדת:  $-0.723 < x < 0$ . ג. אי-זוגית. סרטוט עבור חלק v: סרטוט עבור סעיף ד:

